1. Выпуклые множества

Определение: Пусть $\mathbb{X}$ — аддитивно записанная абелева группа, $\mathbb{P}$ — поле. Пусть определено отображение "$\cdot$": $\mathbb{P} \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}$, такое, что $\forall x,\, y \in \mathbb{X}$, $\forall \alpha,\, \beta \in \mathbb{P}$

1. $(\alpha \cdot \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$;
2. $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$;
3. $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$;
4. $1 \cdot x = x$.

Тогда $\mathbb{X}$ — линейное пространство над полем $\mathbb{P}$.

Определение: Множество $A \subset \mathbb{X}$ выпуклое, если

$$\forall x_1, x_2 \in A: \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}: \quad \alpha + \beta = 1, \alpha \geqslant 0, \beta \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha x_1 + \beta x_2 \in A.$$

Определение: Пусть $\alpha_i \geqslant 0$, $i = 0, \ldots, k$, $\sum\limits_{i=0}^{k} \alpha_i = 1$, тогда $\sum\limits_{i=0}^{k} \alpha_i x_i$ — выпуклая линейная комбинация точек $x_0, \ldots, x_k$.

Утверждение. *Пересечение любого числа выпуклых множеств — выпуклое множество.*

Утверждение. *Пусть A — выпуклое множество, тогда для любых точек $x_0, \ldots, x_k \in A$ их выпуклая комбинация лежит в A.*

Определение: Выпуклая оболочка множества A ($\operatorname{conv} A$) — пересечение всех выпуклых множеств, содержащих A.

Утверждение. $\operatorname{conv} A$ *состоит из всевозможных выпуклых линейных комбинаций всевозможных наборов точек $x_0, \ldots, x_k \in A$.*

Теорема (Каратеодори). *Пусть $\dim \mathbb{X} = n$. Тогда*

$$\operatorname{conv} A = \left\{ x = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i \;\middle|\; x_i \in A, \quad \alpha_i \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1 \right\}.$$

Теорема. *В конечномерном пространстве выпуклая оболочка компакта — компакт.*

Определение: Аффинной оболочкой множества M называется множество линейных комбинаций

$$\operatorname{aff} M = \left\{ x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i \;\middle|\; \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1, \quad x_i \in M, \quad \forall i = 1, \ldots, k \right\}.$$

Утверждение.

$$\operatorname{aff} M = \operatorname{Lin}(M - x_0) + x_0, \quad \forall x_0 \in M.$$

Определение: Размерностью выпуклого называется $\dim \operatorname{Lin}(M - x_0)$, $x_0 \in M$.

Определение: Вектора $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{X}$ аффинно независимы (находятся в общем положении), если

$$\forall \alpha_1, \dots \alpha_k \in \mathbb{R}: \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^k \alpha_i = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \alpha_i = 0, \forall i = 1, \dots, k.$$

Утверждение. *Вектора $x_1, \dots, x_{k+1}$ аффинно независимы тогда и только тогда, когда* $\operatorname{rank}\{\, x_m - x_i \mid m = 1, \dots, k+1\} = k$.

Утверждение. *Если вектора $x_1, \dots, x_{k+1}$ аффинно независимы, то*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \exists! \left\{ \alpha_1, \dots, \alpha_{n+1} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1 \right\}: \quad x = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i.$$

Утверждение. *Числа $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ называются барицентрическими координатами точки x относительно $x_1, \dots, x_{n+1}$.*

$$\alpha(x) = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}).$$

Утверждение. *Отображение $\alpha(x)$ непрерывно.*

Утверждение. *Если вектора $x_1, \dots, x_{n+1}$ аффинно независимы, то* $S = \operatorname{conv}\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$ *— n-мерный симплекс с вершинами $x_1, \dots, x_{n+1}$.*

Теорема. *В пространстве $\mathbb{R}^n$ всякий n-мерный симплекс имеет непустую внутренность.*

Определение: Пусть множество X выпуклое. Относительной внутренностью X ($\operatorname{ri} X$) называется внутренность X относительно $\operatorname{aff} X$. Точнее, x_0 — точка относительной внутренности X, если $\exists U(x_0, \varepsilon) : U(x_0, \varepsilon) \cap \operatorname{aff} X \subseteq X$.

Теорема. *Пусть множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ выпуклое, тогда* $\operatorname{ri} X \neq \emptyset$.

Лемма. *Пусть множество X выпуклое, $x \in X$, $y \in \operatorname{ri} X$. Тогда*

$$\alpha x + (1 - \alpha) y \in \operatorname{ri} X, \quad \forall \alpha \in [0, 1).$$

Лемма. *Пусть $x_0 \in X \subseteq \mathbb{R}^n$, множество X — выпуклое. Тогда существует последовательность $\{x_i\} \subset \operatorname{ri} X$, сходящаяся к x_0.*

1.1. **Теоремы об отделимости.** *Определение*: Множества A и B можно отделить, если

$$\exists \ell \neq 0 : \quad \sup_{x \in A} \langle \ell, x \rangle \leqslant \inf_{x \in B} \langle \ell, x \rangle.$$

Если последнее неравенство строгое, то A и B *строго* отделимы.

Теорема. *Пусть A, $B \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклые множества, $A \cap B = \emptyset$, тогда A и B можно отделить.*

Теорема. *Пусть A, B — замкнутые, A — компакт. Тогда если $A \cap B = \emptyset$, то A и B строго отделимы.*

Определение: Функционал $p : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ называется положительно однородным, если $p(\alpha x) = \alpha p(x)$, $\forall \alpha \geqslant 0$.

Определение: Пусть A — выпуклое множество, $0 \in A$. Функционалом Минковского называется
$$P_A(x) = \inf \left\{ t \;\middle|\; t > 0, \frac{x}{t} \in A \right\}.$$

Утверждение. *Функционал Минковского выпуклый, положительно однородный.*

Теорема (Хан, Банах)**.** *Пусть $\mathbb{X}$ — банахово пространство, $M \subseteq \mathbb{X}$ — линейное подпространство, $p : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ — положительно однородный выпуклый функционал, $\ell : M \to \mathbb{R}$, $\ell(x) \leqslant p(x)$, $\forall x \in M$. Тогда существует $\tilde{\ell} : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ — продолжение ℓ на $\mathbb{X}$, такое, что $\tilde{\ell}(x) \leqslant p(x)$, $\forall x \in \mathbb{X}$.*

Определение: Ядром множества M называется
$$\overset{\circ}{M} = \{ x \in M \mid \forall y \in \mathbb{X} \quad \exists \varepsilon = \varepsilon(y) > 0 : \quad [x - \varepsilon y, x + \varepsilon y] \in M \}.$$

Теорема. *Пусть M, N — выпуклые множества, $\overset{\circ}{M} \neq \emptyset$, $\overset{\circ}{M} \cap N = \emptyset$. Тогда множества M и N можно отделить.*

Теорема. *Пусть $\mathbb{X}$ — банахово, $A \subset \mathbb{X}$ — выпуклое замкнутое множество, π — множество всех полупространств, содержащих A. Тогда*
$$\bigcap_{\Pi \in \pi} \Pi = A.$$

2. Выпуклые функции

Определение: $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} + \{-\infty, +\infty\}$ — расширенная вещественная ось.

В дальнейшем рассматриваются функции $f : \mathbb{X} \to \bar{\mathbb{R}}$.

Определение: $\operatorname{epi} f = \{ (x, \alpha) \in \mathbb{X} \times \mathbb{R} \mid f(x) \leqslant \alpha \}$ — надграфик функции f.

Утверждение. $f(x) = \inf \{ \alpha \in \mathbb{R} \mid (\alpha, x) \in \operatorname{epi} f \}$.

Определение: Функция $\bar{f}$ называется замыканием f, если $\operatorname{epi} \bar{f} = \overline{\operatorname{epi} f}$.

Определение: Функция называется выпуклой, если ее надграфик выпуклый.

Утверждение (Неравество Йенсена)**.** *Функция f является выпуклой тогда и только тогда, когда*
$$f\left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i \right) \leqslant \sum_{i=1}^{r} \alpha_i f(x_i), \quad \sum_{i=1}^{r} \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \geqslant 0, \quad x_i \in \mathbb{X}.$$

Определение: $\operatorname{dom} f = \{ x \mid f(x) < +\infty \}$ — эффективное множество функции.

Определение: Функция f называется собственной, если $f(x) > -\infty$, $\forall x \in \mathbb{X}$, и $\operatorname{dom} f \neq \emptyset$.

Теорема. *Пусть $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Тогда для выпуклости f необходимо и достаточно, чтобы*
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x) \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Лемма. *Пусть выпуклая функция f несобственная, тогда $\forall x \in \operatorname{ri}\operatorname{dom} f$: $f(x) = -\infty$.*

Лемма. *Пусть $x_0 \in \operatorname{ri}\operatorname{dom} f$, функция f выпуклая. Тогда f ограничена сверху в относительной окрестности точки x_0.*

Лемма. *Пусть f выпуклая, $x_0 \in \operatorname{ri}\operatorname{dom} f$, тогда f непрерывна в точке x_0 на $\operatorname{dom} f$.*

Определение: Множество S симплициально, если оно представимо в виде объединения конечного числа симплексов.

Теорема. *Пусть f — выпуклая функция, $S \subseteq \operatorname{dom} f$ — симплициальное множество, тогда f полунепрерывна сверху на S.*

Теорема. *Пусть $f(x)$ выпуклая, $S \subseteq \operatorname{ri}\operatorname{dom} f$ — выпуклое замкнутое ограниченное множество. Тогда f липщицева на S.*

Теорема (А.Д. Александров)**.** *Всякая выпуклая функция дважды дифференцируема почти всюду.*

2.1. **Сопряженные функции.** *Определение*: Пусть $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ — выпуклая функция, тогда сопряженной функцией называется
$$f^*(x^*) = \sup_{x \in \mathbb{X}} \langle x^*, x\rangle - f(x).$$

Утверждение. *f^* — выпуклая замкнутая функция (независимо от f).*

Утверждение (Неравенство Юнга-Фенхеля)**.** $f^*(x^*) + f(x) \geqslant \langle x, x^*\rangle$, $\forall x, x^*, f$.

Лемма. *Пусть f — выпуклая, замкнутая, собственная функция. Тогда f^* — (выпуклая замкнутая) собственная функция.*

Лемма. $f^{**}(x) \leqslant f(x)$, $\forall x \in \mathbb{X}$.

Теорема (Фенхель, Моро)**.** *Если f — выпуклая, замкнутая, $f(x) > -\infty, \forall x \in \mathbb{X}$, тогда операция сопряжения инволютивна, то есть $f^{**} \equiv f$.*

2.2. **Опорные функции.** *Определение*: Опорной функцией множества A называется
$$S(x^*, A) = \sup_{\xi \in A} \langle \xi, x^*\rangle.$$

Лемма. *$S(x, A)$ — выпуклая положительно однородная непрерывная снизу функция.*

Лемма. *Пусть A — выпуклое замкнутое множество, тогда*
$$x \in A \quad \Leftrightarrow \quad \langle x^*, x\rangle \leqslant S(x^*, A), \quad \forall x \in A.$$

Лемма. *Пусть A_1, A_2 — замкнутые выпуклые множества. Тогда*
$$A_1 \subseteq A_2 \quad \Leftrightarrow \quad S(x^*, A_1) \leqslant S(x^*, A_2), \quad \forall x^* \in \mathbb{X}.$$

Теорема. *Пусть $C(x^*)$ — выпуклая замкнутая положительно однородная функция, тогда найдется замкнутое множество A, такое, что $S(x^*, A) \equiv C(x^*)$.*

2.3. **Инфимальная конволюция.** *Определение*: Инфимальной конволюцией функций f_1 и f_2 называется
$$(f_1 \oplus f_2)(x) = \inf_{x_1+x_2=x} f_1(x_1) + f_2(x_2) = \inf_{x_2} f_1(x_1) + f_2(x - x_1).$$

Эквивалентное определение: $\operatorname{epi} f_1 + \operatorname{epi} f_2 = \operatorname{epi}(f_1 \oplus f_2)$.

Лемма. $(f_1 \oplus f_2)^* = f_1^* + f_2^*$.

Лемма. $(f_1 + f_2)^* \leqslant f_1^* \oplus f_2^*$.

Теорема. *Пусть f_1, f_2 — выпуклые функции, непрерывные в окрестности одной и той же точки x_0, тогда $(f_1 + f_2)^* = f_1^* \oplus f_2^*$.*

2.4. **Субдифференциал.** *Определение*: Функция f дифференцируема в точке x по направлению y, если существует
$$f'(x, y) = \lim_{\lambda\to 0+} \frac{f(x + \lambda y) - f(x)}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0+} h(\lambda).$$

Лемма. *Если функция f выпуклая, то $h(\lambda)$ убывает при $\lambda \downarrow 0$. В частности,*
$$\lim_{\lambda\to 0+} h(\lambda) = \inf_{\lambda>0} h(\lambda).$$

Лемма. *Если f — выпуклая функция, то $\varphi(y) = f'(x, y)$ — выпуклая положительно однородная функция.*

Определение: x^* — субградиент функции f в точке x, если $f(y) \geqslant f(x) + \langle x^*, y - x\rangle$, $\forall y \in \mathbb{X}$.

Определение: Субдифференциалом функции f в точке x называется $\partial^- f(x)$ — множество всех субградиентов f в точке x.

Утверждение. *Если f — выпуклая функция, то $\partial^- f(x)$ — выпуклое множество.*

Лемма. *$x^* \in \partial^- f(x)$ тогда и только тогда, когда $f'(x, y) \geqslant \langle x^*, y\rangle$, $\forall y \in \mathbb{X}$.*

Лемма. $\operatorname{cl} \varphi(y) = S(y, \partial^- f(x))$.

Лемма. *Пусть f — выпуклая, $x_0 \in \operatorname{ri} \operatorname{dom} f$, тогда $\partial^- f(x) \neq \emptyset$.*

Лемма. *Для того, чтобы выпуклая функция f была дифференцируема в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы $\partial^- f(x_0)$ состоял из одной точки.*

Лемма. *Если функции f_1, f_2 выпуклые, то $\partial^- f_1(x) + \partial^- f_2(x) \subseteq \partial^-(f_1 + f_2)(x)$.*

Теорема (Моро, Рокафеллар). *Пусть функции f_1, f_2 выпуклы, и существует точка x_0, такая, что f_1 непрерывна в точке x_0, и $f_2(x_0) < \infty$. Тогда $\partial^- f_1(x) + \partial^- f_2(x) = \partial^-(f_1 + f_2)(x)$, $\forall x \in \mathbb{X}$.*

3. Линейное программирование

Определение: Множество K называется конусом, если из $x \in K$ следует $\lambda x \in K, \forall \lambda > 0$.

Определение: Пусть K — конус, тогда $K^* = \{x^* \mid \langle x^*, x\rangle \geqslant 0, \forall x \in K\}$ — сопряженный конус к K. Множество $K_0 = -K^*$ — поляра конуса K.

Лемма. $K^{**} \supseteq K$.

Лемма. *$K^{**} = K$ тогда и только тогда, когда K выпуклый и замкнутый.*

Лемма (О конечно порожденном конусе)**.** *Пусть $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$, $z_i \in \mathbb{X}$, $i = 1, \dots, m$. Тогда (конечно порожденный) конус*

$$K = \left\{ x \;\middle|\; x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i z_i, \lambda_i \geqslant 0 \right\}$$

замкнут.

Пусть $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$; $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m)$, $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s)$.

$K = \{x \mid Ax = 0, Bx \geqslant 0\} = \{x \mid \langle a_i, x\rangle = 0, i = 1, \dots, m, \quad \langle b_i, x\rangle \geqslant 0, i = 1, \dots, s\}$.

Лемма (Фаркаш)**.** $K^* = \{y \mid y = A^*\mu + B^*\lambda, \mu \in \mathbb{R}^m, \lambda \in \mathbb{R}^s, \lambda \geqslant 0\}$.

3.1. **Задача линейного программирования.** Пусть заданы вектора c, b, линейный оператор A. Задача:

$$\langle c, x\rangle \to \min, \quad x \in M = \{x \mid Ax \geqslant b, x \geqslant 0\}.$$

Теорема (О существовании решения)**.** *Пусть $M \neq \emptyset$, $\alpha_0 = \inf_{x \in M} \langle c, x\rangle > -\infty$. Тогда $\exists x_0 \in M \colon \langle c, x_0\rangle = \alpha_0$.*

Двойственная задача линейного программирования:

$$\langle b, y\rangle \to \max, \quad y \in N = \{y \mid y \geqslant 0, A^*y - c \leqslant 0\}.$$

Теорема. *Выполнена следующая альтернатива:*

- ✓ *прямая и двойственная задачи имеют совпадающие конечные решения;*
- ✓ *хотя бы в одной из задач допустимое множество пусто, а в другой задаче одно из двух:*
  - *допустимое множество пусто,*
  - *задача имеет бесконечное решение.*

4. Топологические пространства

Определение: Пусть X — некоторое множество. Топологией в X называется любая система его подмножеств $\tau \subseteq 2^X$, удовлетворяющая следующим требованиям:

1. $\emptyset \in \tau$;
2. $X \in \tau$;
3. если A, $B \in \tau$, то и $A \cap B \in \tau$.
4. если $\forall \alpha \in \mathcal{A}$: $A_\alpha \in \tau$, то и $\bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} \in \tau$.

Множества $A \in \tau$ называются открытыми, а пара (X, τ) — топологическим пространством. Множества вида A^c, $A \in \tau$, по определению замкнуты.

Определение: Топология τ_1 слабее топологии τ_2, если $\tau_1 \subseteq \tau_2$.

Слабейшей топологией является $\tau = \{\emptyset, X\}$, сильнейшей — $\tau = 2^X$.

Определение: Пусть $M \subseteq X$, тогда x_0 — точка прикосновения множества M, если в любой её окрестности есть точка из M, то есть

$$\forall A \in \tau: \quad x_0 \in A \quad \Rightarrow \quad A \cap M \neq \emptyset.$$

Определение: $\operatorname{cl} M$ — множество всех точек прикосновения множества M.

Определение: Замыкание множества ($[M]$, $\overline{M}$) — пересечение всех замкнутых множеств, его содержащих.

Теорема. $\operatorname{cl} M = [M]$, *то есть замыкание множества совпадает со множеством всех точек прикосновения.*

Определение: Система подмножеств $\mathfrak{L} \subseteq \tau$ называется базой топологии τ, если

$$\forall O \in \tau \quad \exists \{G_\alpha\} \subseteq \mathfrak{L}: \quad O = \bigcup_\alpha G_\alpha.$$

Лемма. *Если* $\mathfrak{L}$ *— база некоторой топологии* τ, *то*

1. $\forall x \in X$: $\exists O_x \in \mathfrak{L}$: $x \in O_x$.
2. $\forall G_1, G_2 \in \mathfrak{L}$: $\exists G_3 \in \mathfrak{L}$: $x \in G_3 \subset G_1 \cap G_2$.

Теорема. *Если* $\mathfrak{L} \subseteq 2^X$ *и выполнены условия 1, 2, то* $\mathfrak{L}$ *— база некоторой топологии на* X, *являющейся набором всевозможных объединений элементов* $\mathfrak{L}$.

Лемма. $\mathfrak{L}$ *— база топологии* τ *тогда и только тогда, когда*

$$\forall G \in \tau, x \in G: \quad \exists G_x \in \mathfrak{L}: \quad x \in G_x \subseteq G.$$

Определение: (X, τ) называется пространством со счетной базой (или со второй аксиомой счетности), если существует хотя бы одна счетная база $\mathfrak{L}$ топологии τ.

Определение: Пространство (X, τ) сепарабельно, если существует счетное множество T, такое, что $[T] = X$.

4.1. Аксиомы отделимости.

- T_1 $\forall x \neq y$: $\exists O_x \ni x$, $O_y \ni y$: $x \notin O_y$, $y \notin O_x$.
- T_2 $\forall x \neq y$: $\exists O_x \ni x$, $O_y \ni y$: $O_x \cap O_y = \emptyset$ — любые две различные точки имеют непересекающиеся окрестности (хаусдорфова аксиома отделимости).
- T_3 $\forall x \in X$: A замкнуто, $x \notin A \Rightarrow \exists O_x \ni x$, $O_A \supseteq A$: $O_x \cap O_A = \emptyset$ — любое замкнутое множество и не содержащаяся в нем точка имеют непересекающиеся окрестности.
- T_4 $\forall A, B$ — замкнутые, $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \exists O_A \supseteq A$, $O_B \supseteq B$: $O_A \cap O_B = \emptyset$ — любые два замкнутых множества имеют непересекающиеся окрестности.

Определение: Пространства, удовлетворяющие аксиомам T_1 и T_3 называют *регулярными.*

Определение: Пространства, удовлетворяющие аксиомам T_1 и T_4 называют *нормальными.*

Лемма. *Для того, чтобы точка x была предельной для множества M в T_1–пространстве, необходимо и достаточно, чтобы любая окрестность U этой точки содержала бесконечно много точек из M. (В частности, в T_1–пространстве точка является замкнутым множеством).*

Лемма. *Пусть (X, τ) — T_3–пространство, множество A замкнуто. Пусть $\forall O(A) \in \tau$: $x_0 \in O(A)$, тогда $x_0 \in A$.*

Теорема. *Пространство со счетной базой метризуемо тогда и только тогда, когда оно нормально.*

4.2. **Компактность.** *Определение*: Топологическое пространство называется компактным, если из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.

Определение: Компактное хаусдорфово пространство называется компактом.

Определение: Система множеств A_α, $\alpha \in \Sigma$ называется центрированной, если

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_{\alpha_k} \neq \emptyset, \quad \forall \{\alpha_k\} \subset \Sigma.$$

Лемма. *(X, τ) компактно тогда и только тогда, когда любая центрированная система $\{F_\alpha\}$ замкнутых множеств имеет непустое пересечение.*

Лемма. *Компакт замкнут в содержащем его хаусдорфовом пространстве.*

Лемма. *Пусть (X, τ) компактно, тогда любое его бесконечное подмножество имеет предельную точку.*

Определение: Топологическое пространство называется счетно-компактным, если любое его бесконечное подмножество имеет предельную точку.

Лемма. *Пусть топологическое пространство имеет счетную базу, тогда из любого его открытого покрытия можно выделить счетное подпокрытие.*

Лемма. *Счетно-компактное топологическое пространство со счетной базой компактно.*

Утверждение. *Метрическое пространство компактно тогда и только тогда, когда оно счетно-компактно.*

Утверждение. *Любой метрический компакт сепарабелен.*

4.2.1. *Свойства топологических компактов.* *Определение*: Система множеств $\mathcal{L}$ — предбаза топологии τ, если всевозможные конечные пересечения элементов $\mathcal{L}$ образуют базу топологии.

Определение: Система множеств Γ называется $\mathcal{L}$-покрытием X, если $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$.

Лемма (Александер)**.** *Пусть $\mathcal{L}$ — предбаза топологии τ, и из любого $\mathcal{L}$-покрытия X можно выделить конечное подпокрытие. Тогда (X,τ) компактно.*

Определение: Пусть задано множество индексов $A = \{\alpha\}$, и каждому $\alpha \in A$ соответствует некоторое множество X_α. Тогда произведением множеств $\{X_\alpha\}$ называется множество X всевозможных отображений $x : A \to \bigcup\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$, таких, что $x(\alpha) \in X_\alpha$, $\forall \alpha \in A$.

Определение: $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$, $\pi_\alpha(x) = x(\alpha)$ — проекция X на X_α.

Определение: Тихоновской топологией в X называется топология, предбазой которой является система множеств вида $\pi_\alpha^{-1}(v_\alpha)$, $\alpha \in A$, $V_\alpha \in \tau_\alpha$.

Замечание: Тихоновская топология — слабейшая топология, в которой все функции π_α непрерывны.

Теорема (Тихонов, Чех)**.** *Пусть (X_α, τ_α) компактны, тогда $X = \prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ с тихоновской топологией компактно.*

5. Многозначные отображения

Определение: Пусть (X,ρ) — метрический компакт, тогда $\mathcal{K}(X)$ — множество непустых замкнутых подмножеств X.

Определение: Хаусдорфовой метрикой на $\mathcal{K}(X)$ называется

$$h(A,B) = \inf\{\,\delta > 0 \mid A \subseteq B + O_\delta, \quad B \subseteq A + O_\delta\}.$$

Лемма. *$\mathcal{K}(X)$ сепарабельно и имеет счетную базу.*

Замечание: Счетной базой являются шары $\left\{ A \in \mathcal{K}(x) \;\middle|\; h(\{x_{j_1}, \dots, x_{j_n}\}, A) < \frac{1}{k} \right\}$, где $x_1, \dots, x_n, \dots$ — счетное всюду плотное множество.

Определение: Пусть T — топологический компакт, X — метрический компакт. Тогда $\Gamma : T \to \mathcal{K}(X)$ — многозначное отображение.

Определение: Γ полунепрерывно *сверху* в точке $t_0 \in T$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists O(t_0): \quad \forall t \in O(t_0) \quad \Gamma(t) \subseteq \Gamma(t_0) + O_\varepsilon.$$

Определение: Γ полунепрерывно *снизу* в точке $t_0 \in T$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists O(t_0): \quad \forall t \in O(t_0) \quad \Gamma(t_0) \subseteq \Gamma(t) + O_\varepsilon.$$

Лемма. Γ *непрерывно в точке $t_0 \in T$ тогда и только тогда, когда оно в этой точке полунепрерывно сверху и снизу.*

Утверждение. *Если однозначная функция полунепрерывна снизу как однозначное отображение, то она непрерывна.*

Определение: Пусть T — метрический компакт, тогда Γ непрерывна сверху по Гейне в точке $t_0 \in T$, если

$$\forall \{t_i\} \to t_0, \quad \forall \{x_i\}: \quad x_i \in \Gamma(t_i), x_i \to x_0 \quad \Rightarrow \quad x_0 \in \Gamma(t_0).$$

Определение: $G(\Gamma) = \{\, (t, x) \in T \times X \mid x \in \Gamma(t)\}$ — график многозначного отображения.

Теорема. *Многозначное отображение полунепрерывно сверху тогда и только тогда, когда его график замкнут.*

Определение: Пусть T — измеримое пространство, X — метрический компакт, тогда $\Gamma : T \to \mathcal{K}(X)$ измеримо, если прообраз любого борелевского множества (открытого множества) измерим.

Определение: Пусть G — открытое множество, тогда

$$\mathcal{F}(G) = \{\, K \in \mathcal{K}(X) \mid K \cap G \neq \emptyset\},$$

$$\mathcal{L}(G) = \{\, K \in \mathcal{K}(X) \mid K \subseteq G\}.$$

Теорема. *Множества вида $\mathcal{L}(G)$, $\mathcal{F}(G)$ вместе образуют предбазу топологии в $\mathcal{K}(X)$.*

Лемма. *Пусть A, B компакты, тогда найдется такое $\varepsilon > 0$, что $A + O_\varepsilon \cap B + O_\varepsilon = \emptyset$.*

Определение: Пусть A — произвольное подмножество X, тогда

$$\Gamma^- A = \{\, t \in T \mid \Gamma(t) \cap A \neq \emptyset\}.$$

Теорема. *Пусть Γ — многозначное отображение, тогда следующие утверждения равносильны:*

- Γ *измеримо;*
- $\Gamma^- A$ *измеримо для произвольного замнутого A;*
- $\Gamma^- A$ *измеримо для произвольного открытого A.*

Лемма. *Пусть Γ_i полунепрерывны сверху, $\Gamma(t) = \bigcap\limits_i \Gamma_i(t) \neq \emptyset$, $\forall t \in T$, тогда $\Gamma(t)$ полунепрерывно сверху.*

Лемма. *Пусть Γ_i измеримы, $\Gamma(t) = \bigcap\limits_i \Gamma_i(t) \neq \emptyset$, $\forall t \in T$, тогда $\Gamma(t)$ измеримо.*

Теорема (Филиппов)**.** *У измеримого однозначного отображения существует измеримая однозначная ветвь (селектор).*

Теорема. *Пусть Γ измеримо, тогда существуют ξ_1, ξ_2, $\ldots$ — селекторы, такие, что $\{\xi_i(t)\}$ всюду плотно в $\Gamma(t)$, $\forall t$.*

Определение: (Эквивалентное определение полунепрерывности снизу) Отображение $\varphi : X \to 2^Y$ полунепрерывно снизу, если для всех U — открытых подмножеств Y множество $V = \{\, x \in X \mid \varphi(x) \cap U \neq \emptyset\}$ открыто.

Утверждение. *Если X, Y — компакты, то определения полунепрерывности снизу эквивалентны.*

Определение: $\operatorname{supp} f = \operatorname{cl}\{\, x \mid f(x) \neq 0\}$.

Лемма (О разбиении единицы). *Пусть X — нормальное топологическое пространство, существует его конечное открытое покрытие V_i, $i = \overline{1,n}$. Тогда существуют непрерывные функции $\varphi_i : X \to [0,1]$, такие, что*

- $\operatorname{supp} \varphi_i \subseteq V_i$;
- $\sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_i(x) \equiv 1$.

Теорема (Майкл). *Пусть X — нормальный топологический компакт, Y — банахово пространство, $\varphi : X \to 2^Y$ — полунепрерывно снизу, $\varphi(x)$ — выпукло, замкнуто $\forall x \in X$, тогда φ имеет непрерывный селектор.*

Замечание: Если Y сепарабельно, то можно выделить счетное число всюду плотных непрерывных селекторов.

5.1. **Паракомпактные пространства.** *Определение*: Покрытие A_α, $\alpha \in \Sigma$ локально конечно, если $\forall x_0\ \exists U(x_0)$: $U(x_0) \cap A_\alpha \neq \emptyset$ только для конечного числа α.

Определение: Покрытие A_α вписано в B_β, если $\forall \alpha \in \Sigma\ \exists \beta(\alpha) \in \Delta$: $A_\alpha \subseteq B_{\beta(\alpha)}$.

Определение: Пространство (X, τ) называется паракомпактным, если в любое открытое покрытие можно вписать локально конечное открытое покрытие.

Замечание: Теорема Майкла верна для паракомпактных пространств.

Лемма. *Пусть V_α, $\alpha \in \Sigma$ — локально конечное открытое покрытие, X — нормальное пространство, тогда найдутся непрерывные функции $p_\alpha : X \to [0,1]$, что*

- $\operatorname{supp} p_\alpha \subseteq V_\alpha, \forall \alpha$;
- $\sum\limits_{\alpha \in \Sigma} p_\alpha(x) = 1$ *(здесь сумма берется лишь по конечному числу ненулевых слагаемых в силу локальное конечности).*

6. Дифференциальные включения

Пусть $F(t,x)$ — *непрерывное сверху* многозначное отображение, тогда

$$\dot{x} \in F(t,x)$$

— дифференциальное включение. Решением дифференциального включения называется такая функция $x(t)$, что

$$\dot{x}(t) \overset{п.в.}{\in} F(t, x(t)).$$

Лемма. *Пусть $\dot{x}(t) \in M$, $x(t)$ абсолютно непрерывна, M — выпуклый компакт, тогда*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \dot{x}(t)\,dt \in M.$$

Лемма. *Пусть функции x_k абсолютно непрерывны, $x_k(t) \to x(t)$, $\dot{x}_k(t) \in M$, M — выпуклый компакт, тогда $x(t)$ абсолютно непрерывна, $\dot{x}(t) \in M$, $\forall$п.в. t.*

Определение: Пусть t^δ, x^δ — окрестности точек t, x, тогда

$$F_\delta(t,y) = \left[\operatorname{conv} F(t^\delta, y^\delta)\right]^\delta.$$

Определение: Функция $x(t)$ называется δ-решением, если $\dot{x}(t) \in F_\delta(t, x(t))$, $\forall t$.

Лемма. *Пусть $\delta_i \to 0$, $x_i(t)$ — δ_i-решения, $x_i \rightrightarrows x$, $F(t,x)$ — выпуклое множество, $\forall(t,x)$, $F(t,x)$ полунепрерывна сверху. Тогда $x(t)$ — решение дифференциального включения.*

Теорема. *Пусть F полунепрерывна сверху, $F(t,x)$ — выпуклый компакт, $\forall(t,x)$, заданы значения t_0, x_0, a, b,*

$$\mathcal{Z} = \{\,(t,x) \mid t \in [t_0, t_0+a], \quad |x - x_0| \leqslant b\}, \quad m = \sup_{w \in F(t,x), (t,x)\in\mathcal{Z}} |w|\,, \quad d = \min\left(a, \frac{b}{m}\right).$$

Тогда дифференциальное включение

$$\begin{cases} \dot{x} \in F(t,x), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

имеет на $[t_0, t_0+d]$ решение.

7. Теоремы о неподвижной точке

Теорема (Брауэр). *Пусть $f : X \to X$, $f \in C(X)$, $X = \mathbb{R}^n$, $K \in \operatorname{conv}\Omega(\mathbb{R}^n)$, $f(K) \subseteq K$. Тогда $\exists x$: $f(x) = x$.*

Теорема (Какутани). *Пусть F — полунепрерывное сверху многозначное отображение, $F(x)$ — выпуклый компакт, $\forall x \in K$, K — выпуклый компакт, $F(x) \subseteq K$, $\forall x \in K$. Тогда $\exists x_0$: $x_0 \in F(x_0)$.*

8. Теорема о минимаксе

Определение: Функция $f(x,y)$ имеет седловую точку (x_0, y_0), если

$$f(x_0, y) \leqslant f(x_0, y_0) \leqslant f(x, y_0), \quad \forall x, y.$$

Теорема (О минимаксе). *Пусть f непрерывна на $A \times B$, A, B — выпуклые компакты, $f(x^*, \cdot)$ — вогнутая по y, $f(\cdot, y^*)$ — выпуклая по x, $\forall(x^*, y^*) \in A \times B$. Тогда седловая точка существует.*